Esercizi svolti su serie di potenze

Esercizio 1. Determinare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

e studiare la convergenza negli estremi.

Svolgimento. Raggio di convergenza. Uso il criterio del rapporto asintotico:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Quindi $R = 1 \Rightarrow$ convergenza in $I = (-1, 1)$.
Convergenza negli estremi.

- $x = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 = +\infty.$

- $x = -1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n^2$ che oscilla.

Esercizio 2. Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-1)^n x^{2n} \arctan x \, \mathrm{d}x$$

La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

ha raggio di convergenza $R = 1$ (è la serie geometrica di ragione $z = -x^2$). In particolare, si ha convergenza totale e quindi uniforme sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Allora possiamo integrare per serie e calcolare

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) \arctan(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2} \arctan^2(x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \arctan^2\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$